"Knizhnik-Zamolodchikov微分方程式とDrinfel'd associator"への補遺 (有限群のコホモロジー論の研究)

島田, 信夫

数理解析研究所講究録 1251巻 2002年 57-69

"Knizhnik-Zamolodchikov 微分方程式と Drinfeld associator" への補遺

島田信夫 (Nobuo Shimada)

まえがき 表題の Knizhnik-Zamolodchikov 微分方程式([KZ] 以下 KZ-(微分)方程式と略記する)は、共形場の理論、表現論、量子群論など多方面へ応用され、各分野に重要な影響と発展をもたらした。表題の小論は、数理解析研究所講究録1140号 p.61-75 (2000年4月) に掲載したものであるが、今回は、それに対する訂正および補充の意味でのコメントを付け加えたい。

§1. KZ-方程式に関する複習

KZ-方程式の定義域である複素n次元多様体 Y_n および X_n から始める。Y_n は複素n次元空間 $\mathbb{C}^n$ の開集合として定義される。

$$Y_n = \{(z_1, z_2, \cdots, z_n) / z_i \neq z_j \ (\text{for } i \neq j)\} \qquad (1.1)$$

この Y_n には座標の置換としてn次対称群 S_n が自由に作用する: 例えば左作用 $\sigma\cdot(z_i) = (z_{\sigma(i)})$ $\qquad (1.1)'$

この作用による商空間 $X_n = Y_n/S_n$ も複素n次元多様体である。

自然な射影 $p: Y_n \to X_n$ は次の様な、基本群の間の完全系列を導く (Birman [B])

$$1 \longrightarrow \pi_1(Y_n, *) = P_n \xhookrightarrow{p_*} \pi_1(X_n, \bar{*}) \cong B_n \xrightarrow{\psi} S_n \longrightarrow 1 \qquad (1.2)$$

ここで B_n は Artin の braid (組み紐) 群、$*$ は Y_n の基点、$\bar{*} = p(*)$.

いま V を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として，Y_n 上の自明なベクトル・バンドル $Y_n \times V^{\otimes n}$ を考える．ファイバー $V^{\otimes n} = V_{(1)} \otimes V_{(2)} \otimes \cdots \otimes V_{(n)}$ （$V_{(i)}$ は V のコピー）には S_n の左作用

$$\sigma\cdot(v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_n) = (v_{\sigma(1)}\otimes v_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(n)}) \qquad (1.3)$$

があり，また $\mathrm{End}\, V^{\otimes n}$ = endomorphisms $f: V^{\otimes n}\to V^{\otimes n}$ 全体の作る $\mathbb{C}$ 上の algebra（積は合成）には，S_n の元の自然な作用

$$f \longmapsto \sigma\circ f\circ\sigma^{-1} \quad (\sigma\in S_n) \qquad (1.4)$$

が定義されて $V^{\otimes n}$ への左作用 (1.3) とつり合う．自明な同変ベクトル・バンドル $Y_n\times V^{\otimes n}$ の全空間 E における S_n の作用を

$$(z_i)\times(v_1\otimes\cdots\otimes v_n) \longmapsto \sigma\cdot(z_i)\times\sigma\cdot(v_1\otimes\cdots\otimes v_n) \qquad (1.5)$$

により定義すれば，X_n 上のベクトル・バンドル

$$\begin{array}{ccccc} \underset{\text{ファイバー}}{V^{\otimes n}} & \longrightarrow & Y_n\times_{S_n} V^{\otimes n} & \longrightarrow & X_n \\ & & \parallel & & \parallel \\ & & E/S_n & & Y_n/S_n \end{array} \qquad (1.6)$$

が得られる．ファイバー $V^{\otimes n}$ の代りに $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$ を考えても同様にバンドル

$$\mathrm{End}(V^{\otimes n}) \longrightarrow Y_n\times_{S_n}\mathrm{End}(V^{\otimes n}) = \hat{E}/S_n \longrightarrow X_n \qquad (1.7)$$

が全空間 $\hat{E} = Y_n\times \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ における同一視

$$(z_i)\times f \sim \sigma\cdot(z_i)\times(\sigma\circ f\circ\sigma^{-1}) \quad (\sigma\in S_n) \qquad (1.8)$$

によって得られる．

さて n 次の KZ-方程式

$$(\mathrm{KZ}_n) \qquad dW(z_1,z_2,\dots,z_n) = \hbar\Big(\sum_{i<j}\frac{t_{ij}}{z_i-z_j}(dz_i-dz_j)\Big)W, \quad \Big(\hbar=\frac{h}{2\pi\sqrt{-1}}\Big) \qquad (1.9)$$

は，まず，Y_n 上の関数に対する全微分方程式の形で与えられる．ここで h は定数のパラメター，t_{ij} ($1\le i,j\le n$ ($i\ne j$)) は不定元とも見做

され，次の二つの場合を考える．1) $V=U(\mathfrak{g})$ (複素リー環 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環) で，$t_{ij}\in V_{(i)}\otimes V_{(j)}\subset V^{\otimes n}$，2) V は一般の $\mathbb{C}$-ベクトル空間，$t_{ij}\in \mathrm{End}(V_{(i)}\otimes V_{(j)})\subset \mathrm{End}(V^{\otimes n})$．これに就いて以下の$(t)$を仮定する：

(t)

i) $\hbar$ は t_{ij} とは可換なパラメターである．

ii) 対称性　case 1) $V_{(i)}\otimes V_{(j)}=V^{\otimes 2}$ とみるとき $t_{ij}=t_{ji}$

case 2) $\mathrm{End}(V_{(i)}\otimes V_{(j)})\ni t_{ij}$ に対して，一般に

$\sigma^{-1}\circ t_{\sigma(i)\sigma(j)}\circ\sigma=t_{ij}$ $(\sigma\in S_n)$ であるが，　(1.10)

$\mathrm{End}(V_{(i)}\otimes V_{(j)})=\mathrm{End}(V^{\otimes 2})$ とみるとき $t_{ij}=t_{ji}$

iii) 上記 1), 2) の二つの場合とも，それぞれ t_{ij} 間の積が定義されるが，一般に非可換，ただし交換子積につき

$[t_{ij},t_{kl}]=0$ (i,j,k,l がすべて異なるとき)

$[t_{ij},t_{ik}+t_{jk}]=0$ (i,j,k が相異なるとき)

ついでに，この仮定(t)を満足する $\{t_{ij},\ 1\leq i,j\leq n,\ (i<j)\}$ から生成された $\mathbb{C}$ 上の Lie 環を $\mathfrak{t}_n$ で表わす(t_{ij} で生成された自由Lie環の関係式(t)で生成されたイデアルによる商Lie環が $\mathfrak{t}_n$)。

元に戻って，方程式(KZ_n)(1.9) の右辺における $\sum_{i<j}$ を $\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}$ でおき換えても同じ(t_{ij}の対称性から)であるから，方程式(KZ_n)は，S_nの作用で不変な形であり，従って X_n 上の微分方程式であるとも考えられる．

§2. (KZ_n) の解について，特に $n=2$ の場合．

(KZ_n) の解である $W(z_1,\cdots,z_n)$ (1.9) は，以下の $n=2$ の場合に見ら

れる様に、一般の n について、case 1) の場合は $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$-valued (case 2) の場合は、$\mathrm{End}(V^{\otimes n})$-valued) の多変数正則関数と定義されるが、パラメーター $\hbar$ や不定元 t_{ij} が方程式の係数に含まれていること、および後に解の逆元を考える必要がある等々のことから単に $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ (または $\mathrm{End}(V^{\otimes n})$-) 値でなく、パラメーター $\hbar$ に関する形式的巾級数環 $U(\mathfrak{g})^{\otimes n}[[\hbar]]$ (または $\mathrm{End}(V^{\otimes n})[[\hbar]]$) に値をもつ正則関数であると規定する方が妥当である。実際 $n=2$ の場合 Y_2 上の方程式 (KZ_2) $dW(z_1,z_2) = \hbar(t_{12}\, d\log(z_1-z_2))W$ の解として

$$W_{12} = W(z_1,z_2) = (z_1-z_2)^{\hbar t_{12}} \overset{\mathrm{def}}{=} \exp(\hbar t_{12}\log(z_1-z_2)) \qquad (2.1)$$

が考えられる。これは $\hbar$ の形式的巾級数の形であるが、t_{12} は常に $\hbar$ を伴って現れるため、$W(z) = \sum_{k\geq 0}^{\infty} \alpha_k(z)\, t_{12}^k \hbar^k$ $(z=z_1-z_2)$、$\alpha_k(z)$ は普通の正則関数、の形となり、case 1) のときは、$U(\mathfrak{g})^{\otimes 2}[[\hbar]]$ において、両側イデアル $(\hbar^N) \supset (\hbar^{N+1}) \supset \cdots$ を零の基本近傍系として、$(U(\mathfrak{g})^{\otimes 2})_\hbar = \varprojlim_{N\to\infty} U(\mathfrak{g})^{\otimes 2}[[\hbar]]/(\hbar^N)$ なる完備一様位相代数 ($\mathbb{C}$ 上の) に値をもつ正則関数と考えるのが便利である。(同様に case 2) の場合は $(\mathrm{End}\, V^{\otimes 2})_\hbar = \varprojlim_{N\to\infty} (\mathrm{End}\, V^{\otimes 2})[[\hbar]]/(\hbar^N)$ ー値正則関数)。 (2.2)

ここで t_{ij} に degree 1 を与えると (1.10) の Lie 環 $\mathfrak{t}_n$ は graded Lie 環となり、その universal enveloping algebra $U(\mathfrak{t}_n)$ は graded (associative) algebra over $\mathbb{C}$ となる。この degree による完備化 $\widehat{U(\mathfrak{t}_n)}$ は $U(\mathfrak{t}_n)_\hbar$ (2.2) における完備化と同型となる。(KZ)-方程式の解は $(U(\mathfrak{g})^{\otimes n})_\hbar$-値 (或いは $(\mathrm{End}\, V^{\otimes n})_\hbar$-値) の正則関数と考えられているが、形式的には $U(\mathfrak{t}_n)_\hbar$-値関数として統一され

る. $U(\mathfrak{t}_n) \subset U(\mathfrak{g})^{\otimes n}$ 或いは $\subset \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ 共に S_n-不変な部分環と見做せる.

§3. (KZ_3) の解についての復習

これについては前稿([Sh] 講究録1140)でもかなり詳しく触れたので, 別な解法を紹介する. $n=3$ の場合には変数の reduction によって, (KZ_3) がそれと同値な次の方程式と同値となった.

$$(*_3):\ \frac{dV}{dz} = h\left(\frac{t_{12}}{z} + \frac{t_{23}}{z-1}\right)\cdot V,\ \left(z = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right) \qquad (3.1)$$

これは係数に regular な特異点 $z=0,1$ を持つ一変数の常微分方程式で Fucks-型と呼ばれ, 各特異点の近傍で, 或る点での初期値を指定すれば, その様な正則解が一意的に存在し, 単連結な定義域に解析的延長できることが知られている. 解は各特異点の近傍で, それぞれ存在し(この場合 V_0 と V_1) それらは, 特異点の近傍での漸近挙動に応じて定まった([D]$_2$). ここでは(K.T. Chen[Ch]) による iterated integral の方法で解を求める. (3.1)の方程式$(*_3)$の定義域は $\mathbb{C}' = \mathbb{C} - \{(-\infty, 0] \cup [1, \infty)\}$ とする. $x_1 = t_{12}$, $x_2 = t_{23}$ とおき, これで free に生成された $\mathbb{C}$ 上の Lie 環を $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\{x_1, x_2\}} \subset \mathfrak{t}_3$ とおく. $\mathcal{A} = U(\mathcal{L})$ universal enveloping algebra は, 余積 $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ (algebra map) および counit $\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ をもつ Hopf 代数となる $(\varepsilon \otimes 1) \cdot \Delta = (1 \otimes \varepsilon) \cdot \Delta = id$. $(\Delta \otimes 1) \cdot \Delta = (1 \otimes \Delta) \cdot \Delta$ (coassociativity) 等が成り立つ. $\Delta(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i$ $(i=1,2)$ により Δ が一意的に定まる. $x \in \mathcal{A}$ で $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ が成り立つものを primitive な元と呼ぶ. $\mathcal{A}$ における primitive な元は $\mathcal{L}$ の元に限る. $x, y \in \mathcal{L} \Rightarrow [x, y]$ も primitive. $\mathcal{A}^{[P]} = \mathcal{A}$ の元 x

で $|x| = \mathrm{degree}(x) = p$ なるもので張られた部分加群 $\mathcal{A}^{[1]} = \mathcal{L}^{[1]} = \mathbb{C}\{x_1, x_2\}$.

定理 3.2 (Chen [Ch]) $(*_3)$ の解 V は $\mathcal{A}_h$-値正則関数として, iterated integral で表わされる;

証明) $(*_3)$ の係数 $A(z) = t\!\left(\frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z-1}\right)$ の特異点 $z=0$ の近くに, 点 $z=\varepsilon$ (0 に近い正数 ε) と解 $V_0^{(\varepsilon)}$ をとり, $V_0^{(\varepsilon)}(\varepsilon) = 1$ (初期値) と定める. $\mathbb{C}'$ 内に $z=\varepsilon$ と点 $z = 1-\varepsilon$ を結ぶ curve $z(t)$ を任意に選ぶ. その上で線積分を考えるが簡単のため $z(t) = t \in [\varepsilon, 1-\varepsilon] \subset$ 実軸とする. つまり

$$(*_3)_{実} \quad \frac{dV(t)}{dt} = A(t)\cdot V(t), \quad A(t) = t\!\left(\frac{x_1}{t} + \frac{x_2}{t-1}\right) \qquad (3.3)$$

を考える. $Q_1^{(\varepsilon)}(s) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_\varepsilon^s A(t)\,dt$, $Q_{p+1}^{(\varepsilon)}(s) \overset{\mathrm{def}}{=} \int_\varepsilon^s A(t)\, Q_p^{(\varepsilon)}(t)\,dt \quad (p \geq 1) \qquad (3.4)^{(\varepsilon)}$

とおく. このとき $Q_1^{(\varepsilon)}(s)' = \dfrac{d\,Q_1^{(\varepsilon)}(s)}{ds} = A(s)$; $Q_{p+1}^{(\varepsilon)}{}'(s) = A(s)\cdot Q_p^{(\varepsilon)}(s) \ (p \geq 1)$

従って $V_0^{(\varepsilon)}(s) \overset{\mathrm{def}}{=} Q_0^{(\varepsilon)}(s) + Q_1^{(\varepsilon)}(s) + \cdots + Q_p^{(\varepsilon)}(s) + \cdots$, $Q_0^{(\varepsilon)}(s) \equiv 1 \qquad (3.5)^{(\varepsilon)}$

とおけば, $V_0^{\varepsilon}(\varepsilon) = 1$ (初期値), $A(s) \in \mathcal{A}_h^{[1]}$-値関数 $Q_1^{(\varepsilon)}{}' = A(s) \in \mathcal{A}_h^{[1]}((s))$

従って $Q_1^{(\varepsilon)}(s) \in \mathcal{A}_h^{[1]}((s)) \Rightarrow Q_2^{(\varepsilon)}{}'(s) = A(s)\,Q_1^{(\varepsilon)}(s) \in \mathcal{A}_h^{[2]}((s)) \Rightarrow Q_2(s) \in \mathcal{A}_h^{[2]}((s))$, 帰納的に

$Q_p(s) \in \mathcal{A}_h^{[p]}((s)) \Rightarrow Q_{p+1}(s) \in \mathcal{A}_h^{[p+1]}((s))$ となり, 従って無限級数 $V_0^{(\varepsilon)}(s) = \sum_{n\geq 0} Q_n^{(\varepsilon)}(s)$ は収束する. $\left(V_0^{(\varepsilon)}(s)\right)' = \sum_{n\geq 1} Q_n^{(\varepsilon)}{}'(s) = A(s)\left(1 + Q_1^{(\varepsilon)}(s) + Q_2^{(\varepsilon)}(s) + \cdots\right) = A(s)\cdot V_0^{(\varepsilon)}(s)$ つまり $V_0^{(\varepsilon)}(s)$ は $(*_3)_{実}$ の解 ($(*_3)$ の $z=0$ の近傍の) となる. 線積分を考えれば, 複素関数でも同様にして $(*_3)$ の解 V_0 が得られる.

$z=1$ の近傍での $(*_3)$ の解 V_1 も, $(*_3)_{実}$ ((3.3)) の解 $V_1^{(1-\varepsilon)}$ が点 $z = 1-\varepsilon$ において初期値 1 をとるものとして定まる (解析的な解). 上と同様に

$$\left.\begin{aligned} &Q_1^{(1-\varepsilon)}(s) \overset{\mathrm{def}}{=} -\int_s^{1-\varepsilon} A(t)\,dt, \quad Q_{p+1}^{(1-\varepsilon)}(s) \overset{\mathrm{def}}{=} -\int_s^{1-\varepsilon} A(t)\cdot Q_p^{(1-\varepsilon)}(t)\,dt \quad (p \geq 1) \\ &\left(Q_1^{(1-\varepsilon)}(s)\right)' = A(s), \quad \left(Q_{p+1}^{(1-\varepsilon)}(s)\right)' = A(s)\cdot Q_p^{(1-\varepsilon)}(s) \end{aligned}\right\} (3.4)^{(1-\varepsilon)}$$

$$V_1^{(1-\varepsilon)}(s) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} 1 + \sum_{p \geqq 1} Q_p^{(1-\varepsilon)}(s), \ \left(Q_0^{(1-\varepsilon)}(s) \equiv 1\right), \quad V_1^{(1-\varepsilon)}(1-\varepsilon) = 1 \qquad (3.5)^{(1-\varepsilon)}$$

とすれば $\left(V_1^{(1-\varepsilon)}(s)\right)' = \dfrac{dV_1^{(1-\varepsilon)}(s)}{ds} = A(s)\left(\sum_{p \geqq 0} Q_p^{(1-\varepsilon)}(s)\right) = A(s) \cdot V_1^{(1-\varepsilon)}(s)$

となり，$(*_3)$式の $s=1$ の近くの解が得られる．従って $(*_3)$ の点 $z=1$ の近傍での解 V_1 が得られる．

§4. Drinfeld associator Φ について．

以下 Φ につき，その具体形を調べる方法を考える．定理3.2で得られた解 $V_0(z)$，$V_1(z)$ は共に $1+\sum_{p\geqq 1} Q_p$，$Q_p \in \mathcal{A}_h^{[p]}((z))$ の形であり，従って $\mathcal{A}_h((z))$ における可逆元である．$\Phi = \Phi_{KZ}$ は Drinfeld [D]$_2$ により，

$\Phi = V_1(z)^{-1} V_0(z)$ と定義された． $V_0(z) = V_1(z)\Phi$ を微分して (4.0)

$V_0' = V_1' \cdot \Phi + V_1 \cdot \Phi'$ を得るが，$V_1' = A \cdot V_1$ から $V_1' \cdot \Phi = A \cdot V_1 \cdot \Phi$ $= A \cdot V_0 = V_0'$ となり $V_1 \cdot \Phi' = 0$ を得る．V_1 は可逆であるから $\Phi' = 0$ つまり Φ は z に依らない constant $\in \mathcal{A}_h$ となる (4.1)

$$\Phi = \Phi(\hbar t_{12}, \hbar t_{23}) = \Phi_{1,2,3}$$

の意味は，(KZ_3) の解 W_0，W_1 により示唆される．いま $T = t_{12} + t_{13} + t_{23} \in \mathfrak{t}_3$ とおき，方程式 $(*_3)$ の解 V_0，V_1（前節参照）に対して $W_i = V_i (z_3 - z_1)^{\hbar T}$ を考えると $(i=0,1)$（ただし $(*_3)$ in (3.1) において $z = \dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$ とする）

$$W_i \text{ が } (KZ_3) \text{ の解} \iff V_i \text{ が } (*_3) \text{ の解} \ (i=0,1) \qquad (4.2)$$

が確められる．ここで，$T = t_{12} + t_{13} + t_{23}$ は t_{12}, t_{13}, t_{23} のすべてと可換であり（(1.10)参照），直接計算で (4.2) が得られる。

$W_i = V_i \cdot (z_3-z_1)^{\hbar T}$ $(i=0,1)$ であったから

$$W_1^{-1}\cdot W_0 = (z_3-z_1)^{-\hbar T}\, V_1^{-1}\cdot V_0\cdot (z_3-z_1)^{\hbar T} = V_1^{-1}V_0 = \Phi \quad (4.01)$$

従って $W_0 = W_1\cdot\Phi$ (4.3)

(KZ_3) の $z=e_i$ ($i=0,1$) 近傍での正則解 W_i の漸近挙動は

$$W_0 = W_0((z_1,z_2),z_3) \sim (z_2-z_1)^{\hbar t_{12}}\cdot(z_3-z_1)^{\hbar(t_{13}+t_{23})} \quad (|z_2-z_1|\ll|z_3-z_1|)$$
$$W_1 = W_1(z_1,(z_2,z_3)) \sim (z_3-z_2)^{\hbar t_{23}}\,(z_3-z_1)^{\hbar(t_{12}+t_{13})} \quad (|z_3-z_2|\ll|z_3-z_1|) \qquad (4.4)$$

で与えられる($[D]_2$ および[Sh])から、(1.10)の case 2)の場合を考えることにして、$t_{ij}\in End(V_{(i)}\otimes V_{(j)})$ から W_0 は $End((V_{(1)}\otimes V_{(2)})\otimes V_{(3)})_h$−値の関数、$W_1$ は $End(V_{(1)}\otimes(V_{(2)}\otimes V_{(3)}))_h$−値の関数と考えるのが自然と思われる。すると(4.3)は、$\Phi_{1,2,3}\in Iso((V_{(1)}\otimes(V_{(2)}\otimes V_{(3)})) \xrightarrow{\sim} (V_{(1)}\otimes(V_{(2)}\otimes V_{(3)})))_h$ (4.5)

を意味すると考えられる。Drinfel'd が Φ を associator と呼び、$\mathfrak{g}$ が $\mathbb{C}$ 上の半単純 Lie 環 の場合に、$U(\mathfrak{g})$ の表現空間のカテゴリーにおけるテンソル積の間の associativity constraint $(V_{(1)}\otimes V_{(2)})\otimes V_{(3)} \underset{\alpha}{\cong} V_{(1)}\otimes(V_{(2)}\otimes V_{(3)})$ として Φ_{KZ} の適用を思い着いたのも宜なるかなである(Drinfel'd は (KZ_4) の解の間の monodromy としての $\Phi_{1,2,3}\otimes 1_4$, $\Phi_{1,(23),4}$, $\Phi_{(12),3,4}$, $\Phi_{1,2,(34)}$, $1\otimes\Phi_{2,3,4}$ 等の間の pentagon 公式や、braiding $R_{ij}\in Iso(V_{(i)}\otimes V_{(j)}, V_{(j)}\otimes V_{(i)})_h$, $R_{ij}=\tau_{ij}\circ e^{\frac{\hbar}{2}t_{ij}}$ と $\Phi_{i,j,k}$ の間の Hexagon 公式(MacLane[M])等を示し Φ がカテゴリー論における associativity constraint の条件を満していることを証明した。)(KZ_4) の解については、前稿[Sh]でも詳しく紹介したので、ここでは省略させて頂いた。

§5. associator Φ の特徴づけ

第3節の微分方程式(X_3)の解V_0, V_1とΦの定義$V_1^{-1}V_0=\Phi$(4.01)

また$\mathcal{L}=\mathcal{L}_{\{x_1,x_2\}}$ $(x_1=t_{12},\ x_2=t_{23})$なる自由Lie環($\mathbb{C}$上)およびその普遍包絡環$\mathcal{A}=U(\mathcal{L})$, またそれらの次数(degree)による完備化$\hat{\mathcal{A}}$等の間の代数的諸関係を利用してΦやVの特徴づけを示すが特にΦ＝$\Phi(\hbar t_{12},\hbar t_{23})$(§3参照)の代りに$\Phi(x_1,x_2)$を考える。そのため

微分方程式(X_3)におけるパラメーターħを置き換えて

$$A(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\frac{x_1}{z}+\frac{x_2}{z-1}\right),\quad \frac{dV(z)}{dz}=A(z)V(z) \qquad \cdots \qquad (5.1)$$

の解を改めて$V_0(z)$, $V_1(z)$とおく。これらは§3で述べたのと同じ方法で求めることができる。V_0, V_1を単にVで表わすと

$$V=1+\sum_{p\geq 1}Q_p\in\hat{\mathcal{A}}\langle\langle z\rangle\rangle,\quad Q_p\in\mathcal{A}^{[p]}\langle\langle z\rangle\rangle \qquad (5.2)$$

$$\frac{dQ_p}{dz}=A(z)\cdot Q_{p-1}(z)\quad (p\geq 1)\quad Q_0(z)\equiv 1$$

等が得られる。この意味で

$$\Phi(x_1,x_2)=V_1^{-1}(z)\cdot V_0(z)\in\hat{\mathcal{A}} \qquad (5.3)$$

はzに依らないconstantである。

いま$m=m_{\{x_1,x_2\}}=\mathrm{Ker}(\varepsilon:\mathcal{A}\to\mathbb{C})$ (εはcounit)とおく。 (5.4)

この完備化(次数による) $\hat{m}=\mathrm{Ker}(\varepsilon:\hat{\mathcal{A}}\to\mathbb{C})$

も同様に定義される。$\hat{m}$の元はx_1, x_2の非可換形式的巾級数で常数項＝0なるものである。このとき写像$\exp:\hat{m}\to 1+\hat{m}\subset\hat{\mathcal{A}}$および、$\log:1+\hat{m}\to\hat{m}$が次式で定義されて、互いに逆写像となる：

$$\exp(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{n!} = 1+\omega+\frac{\omega^2}{2!}+\cdots, \qquad \omega\in\hat{\mathfrak{m}}$$

$$\log(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{u^n}{n} = u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\cdots;\ u\in\hat{\mathfrak{m}} \qquad (5.5)$$

これらが互いに逆写像（$\exp\circ\log = id$, $\log\circ\exp = id$）であることが確められる。実際、一つの不定元 T に対して $\exp(\log(1+T)) = 1+T$ は定義(5.5)から容易に従う。そこで連続準同型 $\varphi: \mathbb{Q}[[T]] \to \hat{\mathfrak{m}}$ を $\varphi(T) = u$ で定義すれば $\exp\circ\log(1+u) = 1+u$ を得る、$\log\circ\exp = id$ も同様に示すことができる。([S]) (5.6)

<u>補題 5.7.</u> 写像 $\exp$ は $\hat{\mathfrak{m}}_{\{x_1,x_2\}}$ における primitive な元 α を $\hat{\mathcal{A}}$ における grouplike な元 β にうつす。逆に $\beta\in 1+\hat{\mathfrak{m}}\subset\hat{\mathcal{A}}$ が grouplike な元であれば、$\log\beta$ は $\hat{\mathfrak{m}}$ における primitive な元 $\in\hat{\mathcal{L}}$ となる。

証）$\exp\alpha$ を簡単のため e^α と記す。α が primitive ならば $\Delta\alpha = \alpha\otimes 1+1\otimes\alpha$、従って $\Delta\beta = \Delta e^\alpha = e^{\Delta\alpha} = e^{\alpha\otimes 1+1\otimes\alpha} = e^{\alpha\otimes 1}\cdot e^{1\otimes\alpha}$ $= (e^\alpha\otimes 1)(1\otimes e^\alpha) = e^\alpha\otimes e^\alpha = \beta\otimes\beta$ つまり $\beta = e^\alpha$ は grouplike となる。

逆に β が grouplike とすると $\Delta\beta = \beta\otimes\beta \Rightarrow (\varepsilon\otimes 1)\Delta\beta = \varepsilon(\beta)\cdot\beta$ しかるに $(\varepsilon\otimes 1)\Delta = id$ であるから $\varepsilon(\beta) = 1$ つまり $\beta\in 1+\hat{\mathfrak{m}}$。そこで $\alpha = \log\beta$ とおけば $\beta = e^\alpha \Rightarrow \Delta\beta = \beta\otimes\beta = e^\alpha\otimes e^\alpha = (e^\alpha\otimes 1)\cdot(1\otimes e^\alpha) = e^{\alpha\otimes 1}\cdot e^{1\otimes\alpha} =$ $e^{\alpha\otimes 1+1\otimes\alpha}$（$\alpha\otimes 1$ と $1\otimes\alpha$ とは可換だから）一方 $\Delta\beta = \Delta e^\alpha = e^{\Delta\alpha}$ 従って $\Delta\alpha = \alpha\otimes 1+1\otimes\alpha$ つまり α は primitive 元 即ち $\alpha\in\hat{\mathcal{L}}$ となる。∎

元に戻って、方程式(5.1)の解である $V_0(z)$, $V_1(z)$ は同じ形(5.2)で表わされるので単に $V = V(z)$ で表わす。$V\in 1+\hat{\mathfrak{m}}((z))$

<u>補題 5.8</u> $\Delta: \hat{\mathcal{A}}((z)) \to \hat{\mathcal{A}}((z))\otimes\hat{\mathcal{A}}((z))$ を余積とすれば $\frac{dV}{dz} = A\cdot V$, $A = \frac{x_1}{z}+\frac{x_2}{z-1}$）の解 V_i は $\hat{\mathcal{A}}((z))$ における grouplike な元である：$\Delta V_i = V_i\otimes V_i$ (i=0,1

証）(5.5) により $V=\sum_{p\geq 0}Q_p$ であるから $\Delta V=\sum_{p\geq 0}\Delta Q_p$，($Q_0\equiv 1$)，従って若し，$\Delta Q_p=\sum_{q+r=p}Q_q\otimes Q_r$ が成立すれば，$\Delta V=\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{q+r=p}Q_q\otimes Q_r\right)=\sum_{q,r\geq 0}Q_q\otimes Q_r=\left(\sum_{q\geq 0}Q_q\right)\otimes\left(\sum_{r\geq 0}Q_r\right)=V\otimes V$ となる．従って

i) $\Delta Q_p=\sum_{q+r=p}Q_q\otimes Q_r$ (5.9)

ii) $\Delta\left(\dfrac{dQ_p}{dz}\right)=\dfrac{d(\Delta Q_p)}{dz}$

を induction で導びく．先ず $Q_1\in \mathcal{A}^{[1]}\langle\langle z\rangle\rangle=\mathcal{L}^{[1]}\langle\langle z\rangle\rangle$ つまり $\mathbb{C}\{x_1,x_2\}$ 値関数で Q_1 は primitive $\Delta Q_1=Q_1\otimes 1+1\otimes Q_1$ である．次に ii) であるが Q_p は $\mathcal{A}$-値正則関数で有限和 $\sum_{|m|=p}\alpha_m(z)\cdot m$ の形であり，$\alpha_m(z)$ は各 m (x_1, x_2 の非可換単項式で次数 $|m|=p$ なるもの) に対して定まる普通の正則関数である．従って $(\Delta Q_p)'=\sum_{|m|=p}\alpha_m'(z)\cdot\Delta m=\Delta Q_p'$ 従って ii) を得る．これを用いて，i) が $p<N$ で成立すると仮定して $p=N$ の場合を導びこう．$(\Delta Q_N)'=\Delta(Q_N')\overset{(5.2)}{=}\Delta A\cdot\Delta Q_{N-1}\overset{\text{帰納法の仮定}}{=}(A\otimes 1+1\otimes A)\left(\sum_{q+r=N-1}Q_q\otimes Q_r\right)=$

$$\sum_{q+r=N-1}AQ_q\otimes Q_r+\sum_{q+r=N-1}Q_q\otimes AQ_r=\sum_{q+r=N-1}\left(Q_{q+1}'\otimes Q_r+Q_q\otimes Q_{r+1}'\right)=\left(\sum_{q+r=N}Q_q\otimes Q_r\right)'$$

ここで $(3.4)^{(\varepsilon)}$ から $\Delta Q_N^{(\varepsilon)}(s)=\int_\varepsilon^s(\Delta Q_N^{(\varepsilon)})'=\int_\varepsilon^s\left(\sum_{q+r=N}Q_q^{(\varepsilon)}\otimes Q_r^{(\varepsilon)}\right)'=\sum_{q+r=N}Q_q^{(\varepsilon)}(s)\otimes Q_r^{(\varepsilon)}(s)$

となって i) が $p=N$ で成り立つ．$V=V_1$ の場合 $V_1^{(1-\varepsilon)}$ についても同様である．□

補題 5.8 で $\Delta V=V\otimes V$ が示されたが，これは実は微分方程式 $\dfrac{dH}{dz}=\left(\dfrac{\Delta X_1}{z}+\dfrac{\Delta X_2}{z-1}\right)H$ の解にもなっている．[*] さて，(5.3) から

$V_0=V_1\Phi\Rightarrow\Delta V_0=\Delta V_1\cdot\Delta\Phi\Rightarrow V_0\otimes V_0=(V_1\otimes V_1)\Delta\Phi\Rightarrow$

$(V_1\otimes V_1)^{-1}(V_0\otimes V_0)=(V_1^{-1}\otimes V_1^{-1})\cdot(V_0\otimes V_0)=\Delta\Phi$ が得られ，この左辺は

$V_1^{-1}V_0\otimes V_1^{-1}V_0=\Phi\otimes\Phi$ であるから $\Delta\Phi=\Phi\otimes\Phi$．従って，

<u>補題 5.9</u> $\Delta\Phi=\Phi\otimes\Phi$，つまり Φ は $\hat{\mathcal{A}}$ の grouplike element である．

が得られた. すると補題5.7によって $\theta = \log \Phi$ は primitive な元 in $\widehat{\mathcal{U}}$ となり $\theta \in \widehat{\mathcal{L}}_{\{x_1, x_2\}}$ が得られた.

定理 5.9 (Drinfeld [D]$_2$) $\Phi = \exp \theta$ となる有理数係数の formal Lie element $\theta \in \widehat{\mathcal{L}}_{\{x_1, x_2\}}$ が存在する.

これは Campbell-Hausdorff 定理の類似であり Drinfeld は更に具体的に Φ の表示を求めている ([D]$_2$)

註*) ΔV_i と $V_i \otimes V_i$ が $(i=0,1)$ 共に $\frac{dH}{dz} = \Delta A \cdot H$ の解であることから $\Delta V_i = V_i \otimes V_i$ が導きだせる (補題5.8の別証).

文献

[B] J. Birman, Braids, Links and Mapping Class Groups, Ann. of Math. Study 82, Princeton U.P. 1974

[C] P. Cartier, Construction combinatoire des invariants de Vassiliev – Kontsevich des nœuds. C. R. Acad. Sci. Paris T. 316 Série I p. 1205–1210, 1993

[D]$_1$ V. G. Drinfel'd, Quasi-Hopf algebras. Leningrad Math. J. 1 (1990) 1419–1457

[D]$_2$ V. G. Drinfel'd, On quasi-triangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with Gal($\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$), Leningrad Math J. 2 (1991), 829–860

[J] 神保道夫,「量子群とヤン・バクスター方程式」現代数学シリーズ, シュプリンガー東京.

[Ka] C. Kassel, Quantum Groups, Springer V. GTM 155. Heidelberg 1994

[Ko] T. Kohno, Monodromy Representation of Braided Groups, and Yang-Baxter equations. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 37 (1987), 139–160.

[C-P] V. Chari and A. Pressley, A Guide to Quantum Groups, Cambridge Univ. Press

[S-S] Shnider and Sternberg, Quantum Groups, International Press 1993.

[K-Z] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, Current algebra and Wess–Zumino models in Two dimensions. Nuclear Phys. B. 247 (1984), 83–103.

[M] S. MacLane, Category theory for Working Mathematician,

[Sh] 島田信夫, Knizhnik–Zamolodchikov微分方程式とDrinfel'd associator 数理研講究録 1140 p. 61–75 (2000年4月)

[Chen] K. T. Chen, Formal Differential Equations, Ann. of Math. 73 (1961) 110 ~ 133

[S] J.-P. Serre, Lie Algebras and Lie Groups, Lectures given at Harvard Univ. 1964